نظرية التوازي وأثر العرب فيها

يُعد كتاب « أصول الهندسة » لأقليدس من أعظم الكتب المدرسية Text Books ، التي أثرت في تطور الرياضيات منذ حدود عام ٣٠٠ ق.م حتى اليوم ومن الصعوبة بمكان أن نأتي بمُثُل كثيرة على هذا النوع من الكتب التعليمية فلو عددنا هذا الكتاب مثالاً من العصور القديمة ، لأمكن أن نعد كتاب « الجبر والمقابلة » للخوارزمي مثالاً من العصور الوسطى ، لأن منه نشأ اسم الجبر ، وانتشر موضوع الحساب الجبري أما في العصور الحديثة بعد أن نشأت الحضارة الغربية ، فقد يختار المرء ما بين كتاب « الهندسة » لديكارت الذي أنبثقت منه الهندسة التحليلية أو كتاب « الأسس Principia » لنيوتن الذي نجد فيه أول تصميم دقيق للكون ، وكتاب « البحوث » لكاوس الذي نشره يوم كان في الرابعة والعشرين من عمره وتعرّض فيه لخطوط الرياضيات العريضة ؛ أو لربما اختار كتاب « مقدمة في الجبر » لأويلر الذي فيه مزج الجبر بالتحليل الرياضي فاتسم الثاني بضبط الأول وهكذا ولد التحليل الحديث ويمتاز كتاب « الأصول » عن كافة هذه الكتب بكونه أول كتاب نجد فيه روح البرهنة الرياضية السليمة ، التي أصبحت فيما بعد ، مناراً للأنظمة المنطقية في كثير من فروع المعرفة فالفيلسوف سبينوزا مثلاً يحاول — في كتابه « الأخلاق » — أن يسرد مناقشاته وحججه الفلسفية بشكل نظريات مبنية على الفرضيات والتعاريف ومترابطة فيما بينها ترابط القضايا الهندسية المعروف لدى كل من درس مبادئ الهندسة المستوية لذا أرى من المناسب أن أقف قليلاً عند كتاب « أصول الهندسة » لنعرف منشأه ومحتوياته ورجاته وأثره

لا يُعرف على وجه التحديد متى نُشر هـــذا المؤلَّف ، كما لا يعرف شيء عن مولد مؤلفه

محاضرة عامة القيت في جمعية العلوم الرياضية والفيزيائية في العراق بتاريخ ٩/٤/١٩٥٨

اقليدس أو موته وكل الذي نعرفه أن إقليدس نشر كتابه هذا فى حدود عام ٣٠٠ ق.م فى مدينة الاسكندرية بمصر فقد عاش إقليدس معظم حياته أستاذاً بجامعة الاسكندرية ، ولا نعرف له من المؤلفات شيئاً آخر ولم يصل إلينا عنه أنه ابتدع هذه النظريات الواردة فى كتابه ، لا بل إن قسماً كبيراً من المؤرخين لا ينعتونه بأكثر من جامع ومرتب ومنسق المعلومات المذكورة فيه ولكن الانصاف يحمل ذوي الأغلبية من الكتّاب يشيدون بفضله فى هذا العمل الأول من نوعه ، وهو الذي أصبح فى أكثر من ألفي سنة كتاباً مدرسياً يستعمل فى مدارس أوربة وأفريقية وآسية وحتى أمريكا ولو لوقت غير قصير ويلوح أن الكتاب الأصلي بلغته الإغريقية لم يُتداول كثيراً منذ زمن بعيد ، وأن أقدم نسخه المتداولة هي ترجماته العربية ولقد جاءتنا ترجمات عربية عديدة لهذا السفر النفيس ترجع إلى نصير الدين الطوسي ويوحنا القس وثابت بن قرة والجوهري وغيرهم وتُعد ترجمة الطوسي من أشهرها ولذلك سنعود إليها فيما بعد

أما ترجمة هيث الانكليزية التي نشرها فى حدود سنة ١٩٢١ ، فقد نقلها عن الاغريقية مع شروح وافرة ومقارنة مسهب فيها بالتراجم العربية وقد نشر هذه الترجمة فى ثلاثة أجزاء تُعتبر تحفة كلاسية رائعة فى تاريخ الرياضيات

إن أول ترجمة إنكليزية هي التي كان قد قام بها إديلارد الباثي عن نسخة عربية وجدها فى قرطبة . أما ترجمة هيث فهي أدق التراجم على العموم وأوثقها وأكثرها شيوعاً ، ولذلك سنرجع اليها دون غيرها كلما اقتضت الضرورة ذلك

محتويات « الأصول » :

لقد بنى إقليدس « أصوله » على التعاريف والفرضيات كما تجب الحال مع أي نظام منطقي سليم . ومن دون الفرض لا يمكن البرهان ، لأن الاثبات المنطقي لا بد أن يرتكز على نقطة ابتداء مفروضة بغير مناقشة وإلا فالحلقة المفرغة لا مناص منها ووضع أقليدس إلى جانب

بعض التعاريف المتعلقة بالنقطة والخط والمستوي وحدود الخط والمستوي ، وكذلك الزاوية وأنواعهاوالأشكال وأجزائها ، عشر فرضيات استند إليها في أشتقاق نظريات الهندسة الاقليدية المعروفة ووضع هذه البديهيات في مجموعتين : الأولى سماها بالمفاهيم العامة Commonnotions والثانية دعاها بالبديهيات أو المصادرات Postulates كما أطلق عليها العرب الأقدمون

وتتألف المفاهيم العامة من خمس فرضيات هي :

١ — الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية فيما بينها

٢ — إذا أضيف كميات متساوية الى أخرى متساوية تكون النتائج متساوية

٣ — إذا طرحت مقادير متساوية من أخرى متساوية تكون البواقي متساوية

٤ — الأشياء المتطابقة متساوية

٥ — الكل أكبر من جزئه

وأما الفرضيات الهندسية فعددها خمس أيضاً وهي :

١ — من الممكن الوصل بين أي نقطتين بخط مستقيم

٢ — يجوز مدّ قطعة المستقيم من جهتيها إلى غير حد

٣ — يمكن رسم الدائرة إذا عُلم مركزها ونصف قطرها

٤ — جميع الزوايا القوائم متساوية

٥ — إذا قُطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع أقل من قائمتين فان المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع إذا مُدّا إلى غير حد

وبعد أن قدم اقليدس هذه الفرضيات ، بدأ باشتقاق نظرياته الواحدة بعد الأخرى ولسبب ما ، أراد أقليدس أن يعرف الى أي حد يستطيع أن يسير بالمفاهيم والفرضيات التسع الأولى ومن دون الفرضية العاشرة التي أطلق عليها اسم الفرضية الخامسة أو فرضية التوازي وقد توفق في اشتقاق ٢٨ نظرية فقط دون أن يلجأ الى استخدام بديهية التوازي هذه ومن بين هذه

النظريات ، النظريـة ١٧ وتنص على أن مجموع أي زاويتين في مثلث أقل من قائمتين ، وهي معكوس الفرضية الخامسة أما نظرية ٢٧ فتقول بأنه إذا قُطع مستقيمان بقاطع وكانت الزاويتان المتبادلتان الداخليتان متسـاويتين ، توازى المستقيمان ومن الجدير بالذكر أن نقول إن أي مستقيمين ، على رأي اقليدس ، إما أن يتقاطعا فيكونا متقاطعين وإما أن لا يتقاطعا فيكونا متوازيين ، ولا ثالث لهذين الاحتمالين أما نظرية ٢٨ فتنص على أنه إذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان الداخليتان الخارجيتان والواقعتان على نفس الجهة من القاطع متساويتين ، أو كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين ، يكون المستقيمان متوازيين

ومن السهل استخراج هاتين النظريتين ومن غير استعمال الفرضية الخامسة أما لماذا تجنب أقليدس فرضية التوازي في البرهنة على نظرياته الثماني والعشرين الأولى ، فسيبقى ذلك لغزاً غير قابل للحل من الوجهة التاريخية فقد يكون سببه نفسياً أو منطقياً أو فلسفياً . والذي يمكننا أن نقرره : هو أن أقليدس لم يستعمل بديهية التوازي إلا في البرهان على نظرية ٢٩ وأنه لم يحاول أن يبرر هذا العمل بأي شكل من الأشكال ، مع العلم بأن عمله هذا لا يتطلب التبرير من الوجهـــة المنطقية البحتة

وتنص نظرية ٢٩ من كتاب « الأصول » على ما يلي :

إذا قُطع مستقيمان متوازيان بقاطع فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان ، والزاويتين الخارجيتين الداخليتين متساويتان ، وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين

وبدلاً من أن أسرد برهان أقليدس لهذه القضية الذي في استطاعة الفرد أن يذكره بسهولة ، سأنتقل الى تحليل الوضع الذي ترتب على هذه النظرية واستعمال بديهية التوازي في إثباتها

فمنذ البداية وعقب أقليدس مباشرة ، لم يرتح الرياضيون الهندسيون لعمل أقليدس هـذا ، ولذلك حاولوا أن يجـدوا له بديلاً يرضون عنه وبامكاننا أن نحدد موقف هؤلاء بواحد من

الأوضاع الآتية :

(١) اعتقد قوم أن فرضية التوازي ليست فرضية بحق ، وكان أولى بأقليدس أن يستنتجها من بقية فرضياته التسع ، وبذلك يضعها في قائمة النظريات وهكذا حاول قسم غير قليل من الرياضيين أن يقوم بهذا العمل الذي لم يفعله أقليدس

(٢) وظن قوم آخرون أنه في الامكان البرهنة على نظرية ٢٩ من دون استخدام فرضية التوازي ، فان صح ذلك فستصبح هذه الفرضية لامحل لها من الاعراب

(٣) وحاول قسم ثالث من علماء الرياضيات أن يفيد من نقيض فرضية التوازي ، لاثبات الفرضية نفسها ، وذلك بواسطة خلاف الفرض أو الطريق غير المباشر في البرهان وهكذا فقد أضاف هؤلاء الناس منقوض الفرضية الماشرة الى الفرضيات التسع ، واستمروا على اشتقاق نظريات جديدة علهم يقعون على تناقض في النتائج أو تضارب في النظريات ، وبذلك يبررون صحتها ويثبتون في عين الوقت إمكان استخلاصها ما ذا كانت النتيجة ؟

وقبل أن نجيب عن هذا السؤال ، نود أن نشير ، ونحن في هذه المرحلة ، الى أن فرضية التوازي من بين الفرضيات الأخرى لا يمكن تحقق صحها أو خطأها بصورة اختبارية إن نحن مثلنا الخط المستقيم بشعاع من الضوء أو بخيط رفيع مثلاً والمهم في هذه البديهية أنها تخص المستقيم بكمال طوله إذا تصورناه يمتد الى غير حد في طرفيه ، لأن قولنا : إن مستقيمين متوازيان ، إنما يعني أنهما لا يلتقيان مهما أمتدا ومن الواضح أن هنالك مستقيمات عديدة تمر من نقطة معينة ولا تقطع مستقيماً مُعطى ضمن أية مسافة ثابتة محدودة مهما كانت كبيرة . وبما أن الطول الأعظم الممكن أن تأخذه مسطرة حقيقية أو يأخذه خيط رفيع أو حتى شعاع الضوء الظاهر من خلال تلسكوب هو من المؤكد محدود ، وبما أنه من الممكن رسم ما لانهاية له من المستقيمات داخل أية دائرة محدودة من نقطة معينة بحيث لا تقطع مستقيماً معيناً داخل الدائرة ، فمن الواضح أن هذه الفرضية لا يمكن تأكيد صحتها بالاختبار العملي أو التجربة ولذلك فهي تختلف عن سائر فرضيات أقليدس التي عتلك جميعها طابعاً محدوداً بكونها تتعلق بأجزاء محدودة من المستقيمات

وبأشكال مستوية محدودة الامتداد ولأن هذه الفرضية لا يمكن تحققها بالاختبارات العملية ، يتملكنا الشك فيما إن كانت قابلة للاستنتاج من بقية الفرضيات

ولكيما نعود إلى شرح بعض المحاولات العديدة التي بذلها رياضيون كفاة في حل مغاليق هذا السر الدفين وبطرق عظيمة متنوعة لمدة تزيد على الفي سنة ، يحسن بنا أن نتذكر بعض العبارات الهندسية المكافئة لفرضية التوازي التي يحق لنا أن نستعيض بها عن هذه الفرضية متى شئنا ذلك يقال لفرضية ف ١ إنها تكافيء الفرضية ف ٢ بوجود نظام من فرضيات أخرى ط إذا كان ط + ف١ يؤدي الى استنتاج ف٢ وكذلك ط + ف ٢ يقود الى استخلاص ف ١ . وبهذا المعنى نستطيع ان نثبت ان أياً من العبارات الآتية يكافيء فرضية التوازي :

١) لا يمكن رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم مفروض من نقطة خارجة عنه .

٢) مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين

٣) البعد بين مستقيمين متوازيين ثابت لا يتغير

٤) اذا قطع مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الآخر

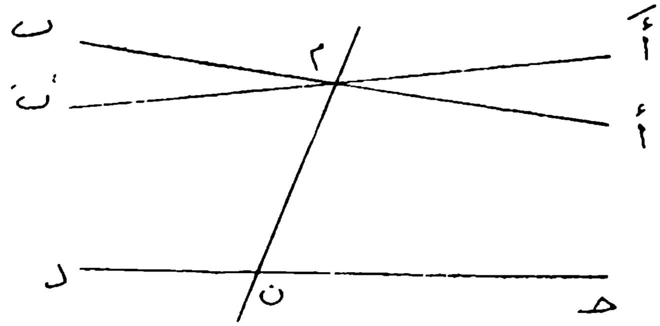
٥) المستقيمات الموازية لنفس المستقيم تكون متوازية فيما بينها .

٦) يوجد زوج من المثلثات المتشابهة

٧) من الممكن إمرار دائرة بثلاث نقاط لاتقع على استقامة واحدة

٨) إذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاث زوايا قوائم فان زاويته الرابعة تكون قائمة أيضاً.

هذه هي أشهر النظريات التي تكافيء بديهية التوازي الاقليدية ، وهي جزء صغير من عدد ضخم لهذا النوع من العبارات الهندسية وكمثال ، دعنا نثبت العلاقة التكافؤية ما بين فرضية أقليدس والعبارة الأولى في القائمة المذكورة اعلاه والمسماة بفرضية بليفير ، التي تنص على عدم إمكان رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه .



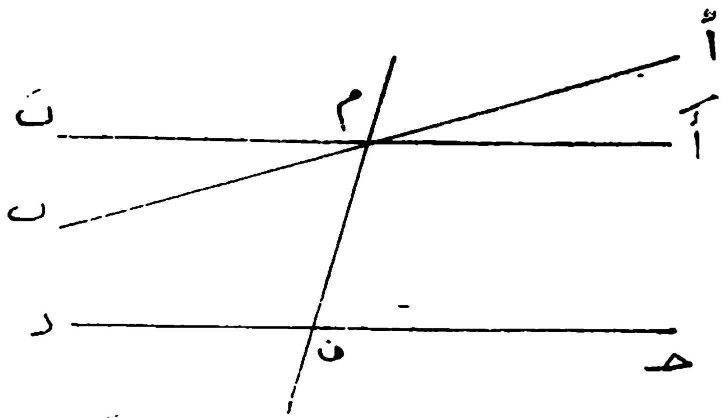
(الشكل ١)

لنفرض أن ا ب ، حـ د مستقيمان وقد قطعا بالمستقيم م ن بحيث كان مجموع الزاويتين أ م ن ، حـ ن م أقل من قائمتين سنثبت أن أ ب و حـ د يتلاقيان فى هذه الجهة من القاطع م ن من نقطة م ، ارسم أَ بَ بحيث يكون مجموع الزاويتين أ م ن ، م ن حـ يساوي قائمتين فبموجب نظرية ٢٨ من « كتاب الأصول » يكون أَ ن موازياً للمستقيم حـ د (الشكل ١) . فلو أفترضنا عدم إمكان رسم أكثر من مواز واحد للمستقيم حـ د من نقطة م — حسب فرضية بليفير — كان عند ذلك واجباً أن يلاقي المستقيم أ ب المستقيم حـ د ، وبذلك نثبت فرضية أقليدس الخامسة .

ومن الجدير بالذكر أن نلاحظ أن تلاقي هذين المستقيمين يجب أن يكون فى الجهة التي فيها مجموع الزاويتين الداخليتين أقل من قائمتين ، وإلا تكون مثلث فيه الزاوية الخارجية أقل من واحدة من زاويتيه الداخليتين ، وهذا مناقض لنظرية ١٦ من « الأصول »

ومن أجل أن نثبت العكس وهو استخلاص نظرية بليفير من فرضية أقليدس ، نفترض ان أ ب ، أَ بَ موازيان للمستقيم حـ د من النقطة م (الشكل ٢) .

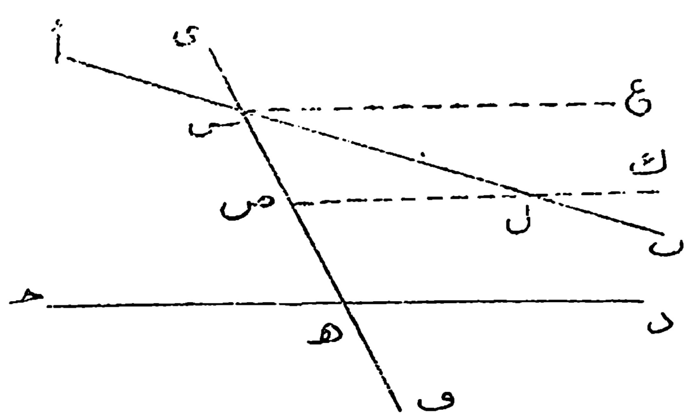
أي مستقيم م ن يمر من م ويقطع حـ د يحدث زاويتين مجموعها قائمتين لذلك فكل من زاوية أ م ن + زاوية م ن حـ ، زاوية أَ م ن + زاوية م ن حـ ، يساوي قائمتين ، وهذا تناقض فيجب لذلك أن ينطبق المستقيم أ ب على المستقيم أَ بَ ، وبذلك يتم المطلوب اذن ففرضية أقليدس وبديهية بليفير متكافئتان من الوجهة المنطقية



(الشكل ٢)

ولننظر الآن فى علاقة فرضية أقليدس بالعبارة التي تنص على « وجود زوج واحد من المثلثات المتشابهة » وهي المسماة بفرضية جون والس أما أن هذه العبارة يمكن استنتاجها من فرضية أقليدس فى التوازي فهو أمر معروف عند كل من درس مبادئ الهندسة المستوية فوجد أن التشابه بين المثلثات يمكن إسناده الى التوازي بين أضلاعها أما عكس ذلك وهو امكان استنتاج الفرضية الاقليدية من وجود زوج واحد من المثلثات المتشابهة فهو أمر لطيف

ليكن المستقيمان ا ب ، حـ د مقطوعين بالمستقيم ى ف فى النقطتين س ، ه على التوالي (الشكل ٣) بحيث كان المجموع زاوية ب س ه + زاوية س ه د أقل من قائمتين



(الشكل ٣)

من الواضح أن زاوية ى س ب أكبر من زاوية س هـ د فلو تحركت القطعة هـ س على المستقيم ى ف ، بحيث يكون المستقيم د حـ مثبتاً بصورة محكمة بالمستقيم ف ى في نقطة هـ ، الى أن تنطبق النقطة هـ على النقطة س ، عند ذلك يأخذ المستقيم د حـ الوضع س ع لذلك فأثناء حركته هذه يجب على المستقيم د حـ أن يقطع المستقيم س ب كما في الوضع ص ك مثلاً فلو رسمنا الآن مثلثاً على القاعدة س هـ مشابهاً للمثلث س ص ل ، وذلك ممكن بحسب فرضية والس ، فسيقطع المستقيم هـ د المستقيم س ب ويتم المطلوب .

إن هذا الاثبات الأخير ، في الواقع يعود إلى جون والس نفسه ، وقد قدمه إثباتاً لفرضية التوازي ولكنه نسي أنه يدور في دائرة من المنطق لأنه استخدم هذه العبارة التي هي صورة أخرى من فرضية التوازي في إثبات فرضية التوازي نفسها

كما قلنا سابقاً ، لقد رحب الرياضيون منذ البداية بفرضيات أقليدس الا فريضته في التوازي ؛ فهم مع أنهم لم ينكروها اعتقدوا أن محلها الطبيعي هو في عداد النظريات ، لا مع البديهيات لذلك حاول عدد غير قليل منهم أن يبرهن على صحة هذه الفرضية باستعمال الفرضيات التسع الباقية ، واتخذوا لذلك سبلاً متنوعة ، منها مباشرة ، ومنها غير مباشرة ، كطريقة خلاف الفرض أو إثبات نظرية ٢٩ من دون استخدام بديهية التوازي ، أو اشتقاق إحدى العبارات المكافئة للفرضية من بقية الفرضيات وقد استمرت هذه المعركة الشديدة الصامتة ما يزيد على ألفي سنة ، وقفت بعدها فرضية التوازي كالطود الشامخ وقد أكسبها هذه المدة نضجاً ، وزادها قوة وثباتاً وكان من نتاج هذه المعركة المريرة نشوء هذا الطابع الضبطي الناشف في الرياضيات عامة ، والرغبة في نقد الفرضيات وتمحيصها وهو مما أدى الى ظهور موضوع أسس الرياضيات Foundations of Mathematics علماً قائماً بذاته ، وتفرعت منه أخيراً مواضيع أخرى هي المنطق الرياضي وعلم ما وراء الرياضيات Metamathematics وفلسفة الرياضيات وكذلك وقد ولدت أيضاً الهندسة اللا أقليدية ، وهي علم لا يقل أهمية عن نقيضه الهندسة الاقليدية ، من حيث النظر أو التطبيق

إن أول محاولة لاثبات فرضية التوازي قام بهـا بطليموس ، حيث قصد أن يستنتج نظرية ٢٩ بغير استخدام هذه الفرضية وتتلخص محاولاته بما يلي :

قال بطليموس : إن امتدادي المستقيمين ، المقطوعين بثالث ، على جهة من القاطع ليسا أكثر توازياً من امتداديهما فى الجهة الأخرى فلو كان مجموع الزاويتين الداخلتين فى احدى الجهتين يقل عن قائمتين لـكان هذا المجموع يقل عن قائمتين فى الجهة الأخرى أيضاً وهكذا يكون مجموع الزوايا الأربع أقل من أربع قوائم ، بينما هو فى الواقع يساوي زاويتين مستقيمتين . ويمكن توليد مثل هذا التناقض لو فرضنا أن مجموع الزاويتين الداخليتين أكثر من قائمتين ، وهكذا استنتج نظرية ٢٩

وبدلاً من أن أبين المغالطة فى هذه المناقشة التي أُريدَ بها برهان النظرية ٢٩ ، سأترك ذلك لأنه ليس مما يصعب تبيانه ؛ وسأنتقل إلى بروكلس بعد بطليموس حيث ترك محاولة فى حدود عام ٤٠٠ ب . م وكان بروكلس قد اطلع على محاولة بطليموس فلم يقتنع بها وأراد أن يأتي بأحسن منها . لذلك أراد بروكلس أن يتجنب هذه الفرضية باعطاء تعريف جـديد للتوازي ، فعرّف المستقيمين المتوازيين بأنهما المستقيمان اللذان تكون الأبعاد بينهما متساوية . ولـكنه لم يوفق للاحظة أنه بهذه الخطوة قد حوّل الصعوبة من محل الى آخر بدلاً من أن يحلها . فهذه الفرضية ، كما ذكرنا ، شكل ثان لفرضية أقليدس ثم قام بمحاولة ثانية فعرّف الموازي كمحل هندسي للنقاط التي تبعد بأبعاد متساوية عن مستقيم معلوم الا أنه فى هذه المرة أثار مشكلة جديدة إذ عليه الآن أن يثبت أن هـذا المحل الهندسي هو خط مستقيم ولأنه لم يتمكن من إثبات ذلك فقد سلّم هذه الخاصية من دون برهان ، وهكذا لم يفلت من دائرة التوازي ففسر الماء بعد الجهد بالماء كما يقولون !

بهذا القدر من المعلومات حول نظرية التوازي نستقبل الحضارة العربية . وكما هو معلوم جيداً كان العرب فى عصر الاسلام قد درسوا العلوم اليونانية وشغفوا بها ، وحفظوها ووسموها فى جوانب عدة وأضافوا اليها أشياء قيّمة ، ثم نقلوها إلى أوربة ، وبذلك نقلوا أوربة من

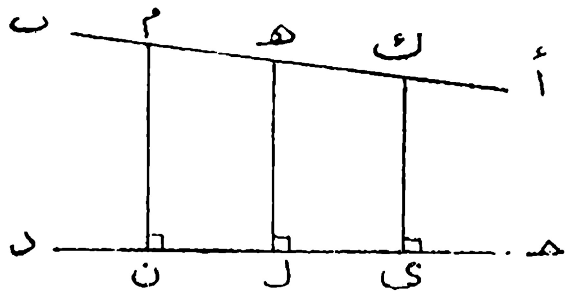
الظلمات إلى النور وكان كتاب « الأصول » من أشهر الكتب الاغريقية التي ترجمها العرب في مناسبات عديدة وفى ترجمات مذيلة بتعليقات وهوامش مع حواش وإضافات ومن أهم الترجمات التي قام بها نصير الدين الطوسي ، التي فيها برز اهتمامه وتضلعه من نظرية التوازي

ولد محمد بن محمد بن الحسن أبوجعفر خواجة نصير الدين الطوسي عام ١٢٠١م فى خراسان . وأدركته المنية سنة ١٢٧٤م ببغداد ولقد بدأ الطوسي حياته العلمية بدراسة مؤلفات أفلاطون وأرسطو وارشميدس وبطليموس وابولونيوس وأقليدس واهتم بكتب ثابت بن قرة وقسطا بن لوقا والحجاج بن مطر والخازن وعمر الخيام وقد ترك الطوسي ترجمتين لكتاب الأصول ، وبذلك أضافها الى ترجمات ثابت بن قرة والحجـاج بن مطر وغيرهما وبلغتنا طبعتان لترجمتي الطوسي الأولى فى رومة عام ١٥٩٤م والثانية فى طهران عام ١٨٨١ م والثانية تتميز عن الأولى باحتوائها على الجزءين الرابع عشر والخامس عشر مضافين الى الأجزاء الثلاثة عشر الأولى الموجودة فى الثانية

ومن ترجمته يلوح أنه كان أول من لفت النظر ، فى دراساته لنظرية التوازي ، إلى النتيجة القائلة بأن مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين ونجد فى محاولاته لاثبات فرضية التوازي بذوراً حية لافكار مهمة سُقيت فنمت وأثمرت فأينعت وكان قطوفها علم الهندسة اللا إقليدية لذلك نرى جون والس الانكليزي وجيرو لامو ساكيري الايطالي يذكران فى مؤلفيهما الخاصين بنظرية التوازي فضل الطوسي فى هذه النظرية ومرجعهما إليه فى دراساتهما للموضوع

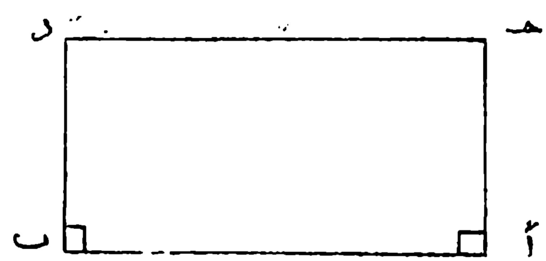
وفى محاولة نصير الدين لاثبات فرضية التوازي ، يفترض البديهية الآتية التي اعتقد أن الاحساس العام Commonsense يسندها ويبرر الاعتماد عليها وهي :

إذا رسم مستقيمان ا ب ، حـ د بحيث كانت الأعمدة م ن ، هـ ل ، ك ى ، ... الخ (الشكل ٤) المرسومة من أحدهما على الثاني تعمل مع أ ب زوايا حواد من جهة أ وبالتالي منفرجات فى جهة ب فان المستقيمين أ ب ، حـ د يتباعدان فى جهة ب د ويتقاربان فى جهة أ حـ ، وبذلك تقصر الأعمدة في الجهة الأولى ، وتطول فى الجهة الثانية والعكس صحيح كذلك بعد هذه الفرضية التي



(الشكل ٤)

سلمها بغير سؤال ، اتخذ شكلاً كان من حسن حظه أن يشهر ويمثل دوراً مهماً في دراسة التوازي . ويتألف هذا الشكل (الشكل ٥) من إقامة عمودين متساويين من طرفي قطعة مستقيم ا ب وعلى نفس الجهة منه مثل أ حـ ، ب د وأخذ أ حـ = ب د ثم اكمل الشكل الرباعي بوصل النقطتين حـ ، د . وبالاستناد الى فرضيته المذكورة في أعلاه وبطريقة خلاف الفرض يتوصل إلى أن



(الشكل ٥)

الزاويتين أ حـ د ، ب د حـ قائمتان إذ قال : لأنه لو أمكن أن تكون الزاوية أ حـ د حادة لكان ب د أقصر من أ حـ حسب فرضيته ، وهو خلاف الفرض وكذلك لا يمكن لهذه الزاوية أن تكون منفرجة وهكذا فقد انقاد في استدلاله إلى أن كلاً من الزوايا الأربع قائمة ، وبذلك يكون المثلثان الناشئان من وصل ا د متطابقين وهو الأمر الذي ينتج عنه أن مجموع زوايا كل منها قائمتان ، وهذا معناه أنه توصل الى إثبات لفرضية التوازي على ما يظهر

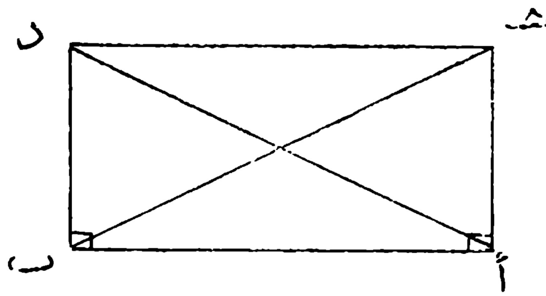
ومن المهم أن نذكر ، مع أن هذه المحاولة لم تنجح كغيرها من المحاولات التي قام بها أناس كفاة ، أنها ولا شك وضعت حجراً أساسياً في بناء مقدمة الهندسة اللا اقليدية . فقد استفاد

ساكيري من هذا الشكل الذي ابتدعه الطوسي ، ولكثرة ما استعمل ساكيري هذا الشكل سمي فيما بعد « برباعي ساكيري » وكان أحق أن يسمى برباعي الطوسي بشهادة ساكيري نفسه .

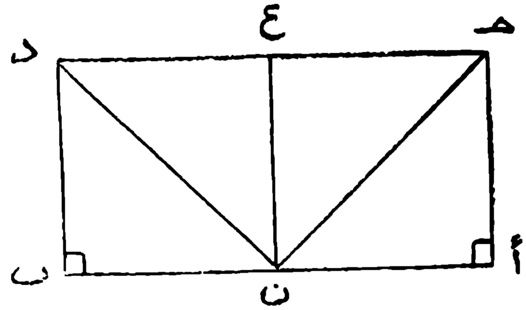
لقد كان ذلك كل ما كان معروفاً من أعمال العرب فى نظرية التوازي حتى عام ١٩٣٥ م حينما نشر المؤرخ الرياضي المعروف ديفد أوجين سمث بحثاً فى العدد الأول من المجلد الثالث من مجلة سكربتا ماثماتيكا Scripta Mathematica ففي هذا البحث أشار سمث الى مخطوطة عثر عليها فى طهران فى أثناء جولته فى الشرق الاوسط وفى ذلك يذكر أن هذه المخطوطة ألفها نصيرالدين الطوسي وهي واحدة من مجموعة رسائل بعنوان « المفاتيح » تحتوي على رسائل تعود الى رياضيين عرب وإغريق وفرس ، ومؤرخة بعام ١٣٨٧ م أي زهاء حوالي ١١٤ سنة بعد موت الطوسي . وفيها يذكر الطوسي أنه ينقل عن كتاب يرجع إلى الشاعر المشهور والرياضي الفلكي المعروف عمر الخيام وبذلك يسجل نصير الدين أن الخيام واحد ممن وضعوا حجراً أساسيا فى نظرية التوازي وإلى ذلك الوقت لم يكن معروفا عند مؤرخي الرياضيات أن الخيام قد اشتغل بنظرية التوازي أو بفرضية أقليدس على الخصوص . وحتى هذا اليوم ، لم تشر بعد كتب تاريخ الرياضيات الى أعمال الخيام فى التوازي بالرغم من النتيجة التي نشرها سمث

ولد عمر بن إبراهيم الخيام عام ١٠٤٤ م وتوفي عام ١١٢٣ م . وهومعروف عندالعرب شاعراً أكثر من كونه عالماً حتى أطلق إسمه على نوع معين من الشعر عُرف « بالخيّاميات » . ولكنه فى الحقيقة قد أبدع فى الجبر ، فدرس الخواص الجبرية للقطوع المخروطية ، واستخدم ذلك فى حلول بعض الأصناف من معادلات الدرجة الثالثة وزيادة على ذلك فقد اشتغل بعلم الفلك وله تقويم فيه وآثار فلكية أخرى .

أما رسالته فى التوازي التي أشار إليها المؤرخ ديفيد سمث فهي تتألف من سلسلة من القضايا يريد بها البرهنة على فرضية التوازي الخامسة .



(الشكل ٦)



(الشكل ٧)

يفترض الخيام قطعة المستقيم أ ب وقد رُسم عليها العمودان حـ أ ، د ب بحيث كانا متساويين ثم يبرهن على أن زاوية د حـ أ = زاوية حـ د ب (الشكل ٦) وذلك بأن يطابق بين المثلثين حـ أ ب ، د أ ب فيستنتج أن زاوية ب حـ أ = زاوية أ د ب ثم يطابق بين المثلثين د أ حـ ، ب د حـ ويستنتج تســـاوي الزاويتين ب جـ د ، أ د حـ وهكذا يحصل على أن زاوية أ حـ د = زاوية ب د حـ .

ويثبت في القضية التالية أن العمود المقام من منتصف أ ب (الشكل ٧) ينصّـف حـ د ويكون عموداً عليه وذلك بتطابق المثلثين حـ أ ن ، د ب ن أولاً ثم المثلثين جـ ن ع ، د ن ع ثانياً .

وأخيراً في قضيته الثالثة يبرهن الخيام على أن الزاويتين أ حـ د ، ب د حـ المتساويتين يجب أن تكون كل منها قائمة ، وذلك بالاعتماد على العبارة القائلة : بأن المسافة بين المستقيمين المتوازيين ثابتة لا تتغير

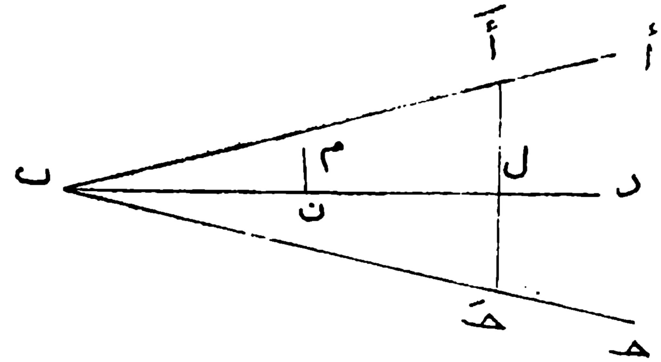
ومن غريب المصادفات أن يظهر العدد الرابع من السنة الثالثة — نيسان (ابريل) ١٩٥٨ —

من مجلة العلوم التي تصدرها دار العلم للملايين ببيروت في هذا الاسبوع حاوية مقالا فيه ينقل كاتبه ويشرح مقالة الخيام التي نحن بصددها ، التي سبق أن كشفها المؤرخ سمث عام ١٩٣٥ م كما قلنا آنفاً وبذلك كفاني هذا المقال ، الذي أصبح بمتناول القراء الآن ، مؤونة الشرح المفصل لهذه المخطوطة التي لم تكن معروفة من قبل ولكني قبل أن أنتقل الى نقطة أساسية في كلمتي هذه أود أن أشير إلى أن سمث قد قارن في خطوط عريضة ما بين سلسلة نظريات الخيام التي نوهنا بها وسلسلة من نظريات ساكيري فأبان أن السلسلتين متشابهتان في وجوه عدة ، ومتطابقتان حتى في البراهين في أحيان كثيرة وهكذا يتبوأ الخيام محله ما بين أقليدس وساكيري بين علماء نظرية التوازي .

ويلوح كذلك أن هذا كل ما هو معروف من أعمال العرب في بحوث التوازي ، إلا أني قد عثرت قبل سنوات قليلة في مكتبة بلمبتون بجامعة كولومبيا على مقالة هندسية ينسب فيها كاتبها برهاناً لفرضية التوازي الى أثير الدين الأبهري المتوفى سنة ١٢٦٤ م وتبين لي أن هذه الرسالة ليست معروفة عند مؤرخي الرياضيات لا بل ليس معروفاً عندهم أن الأبهري ، وهو من المفكرين العرب ، قد اشتغل بالرياضيات وفي بديهية التوازي ذاتها لذلك سأكرس الباقي من هذه الكلمة في شرح محاولة أثير الدين الأبهري لاثبات فرضية التوازي

يحاول أثير الدين أن يثبت أولاً القضية الآتية :

المستقيم العمود على منصف زاوية من نقطة مفروضة عليه ، يقطع ضلعيها



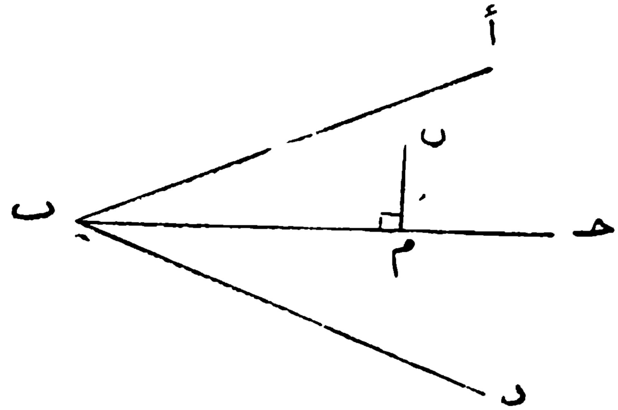
(الشكل ٨)

فالمفروض الزاوية أ ب حـ ، والمستقيم ب د منصف لها أخــــذت النقطة ن أياً كانت على المستقيم د ب وأقيم منها العمود ن م والمطلوب إثباته أنّ ن م يقطع المستقيمين أ ب ، حـ ب .

من الواضح أن هنالك مستقيمات عمودية على د ب وتقطع المستقيمين أ ب ، حـ ب وهي ولا شك المستقيمات التي يصل كل منها بين نقطتين تقعان على أ ب ، حـ ب ، وعلى مسافتين متساويتين من نقطة ب . ولاثبات أنّ ن م يقطع ضلعي الزاوية نقول : إنه لوصح أن يكون ن م غير قاطع لها ما أمكن لأي عمود أخر مرسوم من نقطة ل التي هي أبعد عن ب من نقطة ن أ ن يقطع أ ب ، حـ ب وذلك واضح من حصول المثلث ل ب أ وفيه تصبح زاوية م ن ب الخارجية مساوية لزاوية أ ل ن الداخلية لأنّ كلتيها قائمة ، وذلك غير ممكن بموجب نظرية ١٦ من كتاب « الأصول » لذلك لا يمكن لعمود أن يعقب م ن وأن يقطع ضلعي الزاوية أ ب حـ وهكذا فالأعمدة التي تقطع ضلعي الزاوية تتلو بعضها بعضاً ، بينما الأعمدة التي لاتقطع تكوّن فيما بينها نظاماً متراصاً ، لايفصل بعضــه عن البعض أي عمود من النوع الذي يقطع . لنفرض الآن أن آخر الأعمــدة من النوع الأول الذي يقطع ضلعي الزاوية هو م ن مثلاً (الشكل ٨) . فلاثبات عدم إمكان ذلك أيضاً يـكفي أن نأخذ نقطتين أَ ، حَ أبعد من نقطتي تقـاطع آخر الأعمدة ، وهو م ن ، مع ضلعي الزاوية بحيث يـكون بعداهما عن رأس الزاوية متساويين وبما أنّ الخط الواصل بين هاتين النقطتين سيكون عموداً على ب د ، فقد وجدنا عموداً آخر يتلو العمود م ن ويقطع ضلعي الزاوية ، هو خلاف الفرض القائل بأن م ن هو آخر الأعمدة من هذا النوع . بذلك يتم الأبهري برهان نظريته وسوف أترك مناقشة هذا البرهان ، وتبيان أوجه الضعف أو المغالطة فيه لأتابع بقية المحاولة . فبعد ذلك أنتقل أثير الدين فى إثباته الى فرضية أقليدس ، فطبق عليها قضيته السابقة ومن أجل ذلك لاحظ احتمالات ثلاثة هي :

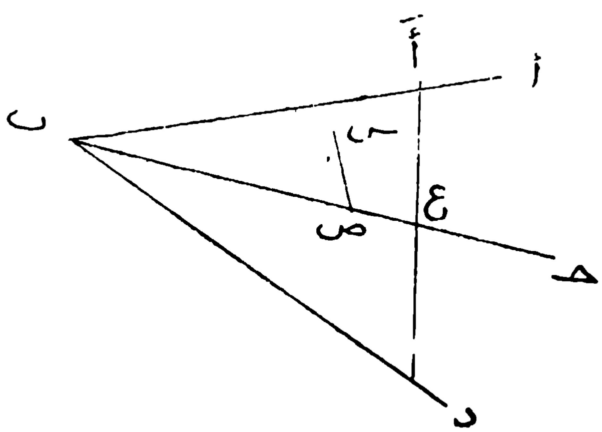
(١) إذا كانت إحدى الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع — حسبما تنص عليه فرضية التوازي — قائمــة والأخرى حادة فعندئذ رسم مستقيماً مثـل ب د يصنع زاوية مع حـ ب تساوي زاوية أ ب حـ فحسب نظريته المذكورة اعلاه يقطع المستقيم العمود م ن

ضلعي الزاوية أ ب د ، وبذلك يتلاقى المستقيمان م ن ، أ ب في جهة القاطع حـ ب التي فيها زاوية ن م ب + زاوية أ ب م أقل من قائمتين (الشكل ٩)



(الشكل ٩)

(٢) أما إذا كانت كل من الزاويتين حادة مثل الزاويتين أ ب حـ ، س ص ب الناشئتين من قطع المستقيم حـ ب للمستقيمين أ ب ، س ص ، فنرسم أيضاً مستقيماً مثل ب د (الشكل ١٠) بحيث تكون زاوية حـ ب د تساوي زاوية أ ب حـ لنأخذ نقطة مثل ع على المستقيم حـ ب المنصّف للزاوية أ ب د . إن العمود القائم من نقطة ع على حـ ب يقطع المستقيمين أ ب ، د ب بموجب القضية السابقة . فعندئذ يجب على المستقيم س ص أن يقطع أ ب ، وإلا فانه يقطع العمود ع أَ

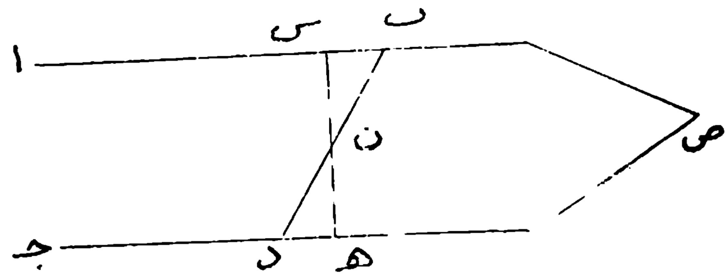


(الشكل ١٠)

وهذا مستحيل لأن الزاوية الحادة س ص ب تصبح خارجية بالنسبة للمثلث المتكون والذي فيه زاوية أ ع ب قائمة

(٣) تبقى الآن الحالة الأخيرة وفيها إحدى الزاويتين حادة والأخرى منفرجة

لنفرض المستقيمين أ ب ، د حـ وقد قطعهما المستقيم ب د بحيث كان المجموع زاوية أ ب د + زاوية ب د حـ أقل من قائمتين ، والزاوية أ ب د حادة ، بينما الزاوية ب د حـ منفرجة (الشكل ١١)



(الشكل ١١)

ننصف ب د في ن وننزل ن هـ عموداً على د حـ ، فتكون زاوية د ن هـ حادة بموجب نظرية ١٧ من «الأصول». وبما ان زاوية أ ب د حادة كذلك ، فيجب على امتداد المستقيم هـ ن أن يلاقي المستقيم أ ب في نقطة مثل س وذلك بتطبيق الحالة الأولى لا يمكن لزاوية ب س ن أن تكون قائمة والا لتطابق المثلثان ب س ن ، د هـ ن وكانت بنتيجة ذلك زاوية س ب ن = زاوية ن د هـ وبالتالي زاوية ن د حـ + زاوية ن د هـ = زاوية س ب ن + زاوية ن د حـ وهذا غير معقول لان أحد طرفي المتساوية يساوي قائمتين بينما طرفها الثاني أقل من قائمتين . وكذلك فلا يمكن للزاوية ب س ن أن تكون حادة لأن ذلك يؤدي بالمستقيمين أ ب ، حـ هـ أن يتلاقيا من الجهة الثانية في نقطة مثل ص وذلك حسب الحالة الأولى . وهكذا تكون زاوية ب د حـ خارجية بالنسبة للمثلث د ب ص فيجب أن تكون أكبر منها بموجب نظرية ١٦ من «الأصول» ، وهذا مناقض للفرض القائل : بأن مجموع زاوية أ ب د + زاوية ب د حـ أقل من قائمتين ، بينما نجد والحالة هذه أن زاوية أ ب د + زاوية د ب ص = قائمتين وبذلك يجب أن تكون زاوية

د ب ص أكبر من زاوية ب د حـ وهكذا نستنتج بأن زاوية ب س هـ منفرجة وتكون زاوية أ س هـ حادة . وبتطبيق الحالة الأولى يتلاقى المستقيمان أ س ، حـ د فى الجهة الثانية ويتم المطلوب.

ومع أن البرهان الذي قدمه الأبهري غير مضبوط منطقياً كغيره من البراهين التي تكسّرت على صخرة فرضية أقليدس ، فمالجته تنطوي على عمق ، وتمتاز بطابع الابداع الأصيل فلم يسبق أن لاحظ أحد قبله العلاقة ما بين فرضية أقليدس وقضية الأبهري المذكورة فى صدر محاولته ، وبذلك أضاف نظرية مكافأة لها ويظهر عمق هذا البرهان بجلاء أكثر حينما نعلم بأن أحد الرياضيين الانكليز نشر « برهاناً » لفرضية أقليدس مشابهاً لبرهان الأبهري عام ١٨٩٨ م أي بعد الأبهري بما يقرب من ٧٠٠ سنة ، وذلك فى « مجلة الرياضيات البحتة والتطبيقية » وبغير تحويل يذكر هذا مع علمنا بأن المشكلة كانت قد انتهت قبل هذا التاريخ بزهاء ٣٢ سنة ، حين ولدت الهندسة اللا اقليدية ، وثبت عدم إمكان أشتقاق فرضية التوازي من بقية فرضيات أقليدس ، فقد بُنيت الهندسات اللا اقليدية على نظام من الفرضيات يضم فرضيات أقليدس كلها ، عدا العاشرة التي استعيض عنها بنقيضها وهو : من الممكن رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه ، ويسمى هذا الفرع من الهندسة اللااقليدية بالهندسة المذلولية Hyperblic Geometry ثم اخترعت هندسة أخرى لا وجود فيها ولا معنى للتوازي ولذا لا يمكن رسم أي مواز لمستقيم معلوم من نقطة مفروضة خارجة عنه ؛ وتسمى هذه بالهندسة الهليلجية Elliptic Geometry وبقى لبلترامي الايطالي أن يثبت عام ١٨٦٨ م عدم التناقض ما بين هذه الهندسات أو ما بينها وبين الهندسة الاقليدية ، وبذلك انتهت مشكلة التوازي ، وثبت عدم امكان استخلاص هذه الفرضية من بقية الفرضيات الاقليدية ، وأنها ونقيضها سيان

وفى الختام نقول إن الأسس التي شقها أقليدس ، وزاد فى حفرها بروكلس والطوسي والخيام والأبهري ، ملأها بالحجارة الصلبة ساكيري ولامبرت وليجندر ، ثم شيدّ عليها گاوسي وبوليا ولوباچيفسكي وريمان وكلاين وهربرت بناء الهندسة الشامخ بطبقاته الثلاث ؛

وبذلك طويت صفحة قصة لا أجد لها وصفاً أجل من عبارة الأستاذ كايزر التي قال فيها : ـ

« لقد كان من حسن حظ إحدى فرضيات أقليـدس — فرضيته الخامسـة — أن تكون خالقة لمصر ، فهي أشهر وأعمق همسـة أطلقتْ في جوف تاريخ العلوم » . م

محمد واصل الظاهر

المراجع

1. Boyer, C., The Foremost Textbook of Modern Times; Proceedings of the Internal Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., U.S.A., (1950) ; P. 748.

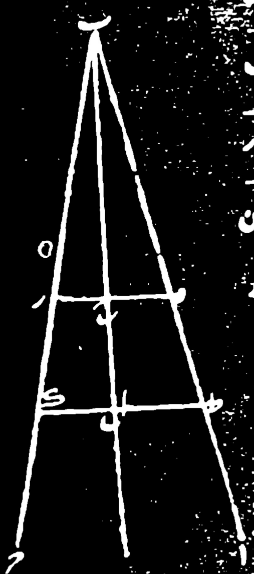
2. Bonola, R., Non-Euclidean Geometry ; Dover Publications, (Combined with the books of Bolyai & Lobachevski) ; (1911) ; PP. 1—180.

3. Callahan, J. J. ; Euclid or Einstein, The Devin-Adair Company, N. Y ,(1931); PP. 57—137.

4. Courant, R. and Robbins, H. ; What is Mathematiess ? Oxford University Press, London, (1946) ; PP. 214-226.

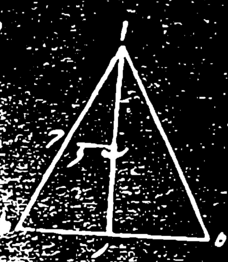
5. Wilder, R., Foundations of Mathematics, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., (1952); PP. 3-49, 264-283.

6. Wolfe, H., Introduction to Non-Euclidean Geometry, The Dryden Press, N. Y., (1945) ; PP. 1-130.

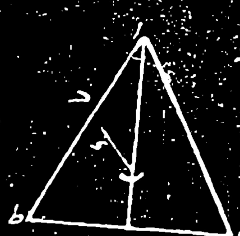


الزاويتين المتقابلتين الحادثتين من تقاطع خطين متساويتان ولذلك
ان زاويتي ا ه ر و [illegible] متساويتان فيتساوى
المتبادلتان ويلزم الزاويتان [illegible] كما مر ايضا وان كانت
الزاويتان الداخلتان اللتان على الخطين في جهة واحدة كاه ر
ه ح ر كقائمتين و ا ه ر مع ب ه ر كالمجموع لها ايضا كقائمتين
لما مر في الشكل الاول من ان الزاويتين الحادثتين من جنبتي خط
مستقيم قائم على اخر اما قائمتان او مساويتان لقائمتين فيلزم
منه ايضا اي كما لزم من تساوي الخارجة والداخلة تساوي
المتبادلتين اي زاويتي ب ه ر و ح ر ه باسقاط الاشتراك
اي زاوية ا ه ر ويلزم التوازي وذلك ما اردناه وهذا موضع
ذكر البرهان الموعود على المصادرة المشهورة قال الحكيم [illegible] الدين
الابهري اذا نصف [illegible] ا ب [illegible] فانه يمكن ان
يخرج لها اوتار الى غير النهاية [illegible]
كل واحد منها قاعدة [illegible]
ب ه مثل [illegible] ونصل ه ر [illegible] ب ح مثل د ب ح

وزاويتا ب متساويتان فزاويتا ج متساويتان فخط ب ج عمود
على ه ز فنفصل ب ه مثل ب ك ونصل ه ك [illegible]
بتقاطع والا لكان زاويتا ب ج و ب ج ك مثل قائمتين
وقد كان ب ج ه ب ج ه مثلهما هذا خلف فلا يتقاطع [illegible]
اه وخطان مستقيمان في سطح [illegible] غير متقاطع مثل نقطة
ل وعلى هذا يمكن اخراج الاوتار الى غير النهاية [illegible]
فنقول اذا وقع خط على خطين وصير الزاويتين الداخلتين في جهة
اقل من قائمتين فانهما يلتقيان في تلك الجهة ان اخرجا لانها
لا يخلو اما ان يكونا حادتين او احديهما حادة والاخرى قائمة
او منفرجة فليكن احديهما حادة والاخرى قائمة مثل خطي ا ج ب د
وقع عليهما خط ا ب وصير زاوية ا ب د قائمة وزاوية ب ا ج
حادة فنفصل زاوية ب ا ه مثل ب ا ج ونخرج [illegible] على الاستقامة
الى [illegible] زاوية ه ا ج منقسمة [illegible]
[illegible] تقع بعضها تحت بعض كما [illegible]
تحت نقطة ب ولكن [illegible]



على اد ا زد ط لا يلتقى ب د و الا لحدث فى مثلث ما يساوى وهو
مح بالبح عشر من اولى الاصول وهو ان كان محاله بالثانى
والثلثون منها انه وهو العشرون من كتابنا هذا الا ان المصادرة
ا فحقق بيانه فلا يصح ان يوضع فى بيانها وسنذكر ذلك الشكل
بعد الفراغ عن هذا الكلام ان شاء الله تعالى فانه وان كان غنيا
عنى فى بيان هذه المصادرة بما سنبين ذلك من الشكل الثامن عشر
من هذا الكتاب وهو الثامن والعشرون من اولى الاصول
لكنه يحتاج اليه فى الموضعين الاخرين فب د اذا اخرج بالاستقامة
تقطع خط ا ط ويكون الزاويتان حادتين فلنعد الشكل بحيث
يكون زاوية ا ب ج حادة وايضا فلما كانتا حادة يكون زاوية ر
منفرجة و ا ر ط قائمة ر ط لا يلتقى ر د و الا لوقع فى مثلثه قائمة
و منفرجة وهو محال الشكل ايضا فب د اذا اخرج تقطع ا ح
ولتكن احدى الحادة والاخرى منفرجة مثل خطى ا ب ج د
ونخرج عليها خط ه ر ونصير زاويتى ب ه ر د ر ه اقل من
قائمتين وزاوية د ر ه منفرجة و ب ه ر حادة فنصف



خط ه ر على ح ويخرج من نقطة ح خط ح ط عمودا على ح ر ويخرج بإستقامة
فلأن زاويتي ح ط ر قائمة فخط ر حادة فخط ح م حادة ايضا
ود ب ه ح حادة فخطا ه ح م يلتقيان ولنكن التقاؤهما
على نقطة ك فزاوية ك ح منفرجة لأنها لو كانت قائمة او حادة
فإن كانت قائمة فزاويتا ك ح ه ح ك مثل زاويتي ط
ط ح ر و ه مثل ط ح ر فزاوية ك ه ح مثل ح ر ط فيجعل زاوية
د ر د مشتركة فزاويتا ر مثل زاويتي [illegible] ك ه ح فزاويتا
اصغر من قائمتين هف وان كانت حادة فزاوية [illegible] ك ح [illegible]
فخطا ا ب ح د يلتقيان ولكن [illegible] من نقطة ا [illegible]
زاويتي ب د ر ر ه اصغر من قائمتين [illegible]
مثل قائمتين فزاوية [illegible]
اصغر من القائمة هف فاذن ثبت ان زاوية [illegible] ح
منفرجة فزاوية ك ط حادة وزاوية د ط ك قائمة
فخطا ا ب ح د يلتقيان وذلك ما اردنا وقال اقليدس
في التاسع عشر من اول كتابه كل زاويتين مثلث فهما اصغر

